Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Piano

1 maximumscore 4

- (Voor de groeifactor g geldt) $g^{48} = \frac{440}{27{,}5}$ $(=16)$ 1
- $g = \left(\frac{440}{27{,}5}\right)^{\frac{1}{48}}$ 1
- $g = 1{,}05946...$ 1
- Het gevraagde percentage is 5,95(%) 1

2 maximumscore 5

- De vergelijkingen $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20$ en $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20\,000$ moeten worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijkingen kunnen worden opgelost 1
- Dit geeft respectievelijk $m = 15{,}4...$ en $m = 135{,}0...$ 1
- Het laagste MIDI-nummer is dus 16, het hoogste 135 1
- Het antwoord: 120 (toetsen) 1

of

- De vergelijkingen $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20$ en $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20\,000$ moeten worden opgelost 1
- $m = 15$ geeft $f = 19{,}...$; $m = 16$ geeft $20{,}...$ 1
- $m = 135$ geeft $f = 19\,912{,}...$; $m = 136$ geeft $21\,096{,}...$ 1
- Het laagste MIDI-nummer is dus 16, het hoogste 135 1
- Het antwoord: 120 (toetsen) 1

of

- Uit $f = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)}$ volgt $2^{\frac{1}{12}(m-69)} = \frac{f}{440}$; dit geeft $\frac{1}{12}(m-69) = {}^{2}\log\left(\frac{f}{440}\right)$ 1
- Hieruit volgt $m = 12 \cdot {}^{2}\log\left(\frac{f}{440}\right) + 69$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- $f = 20$ en $f = 20\,000$ invullen geeft respectievelijk $m = 15{,}4...$ en $m = 135{,}0...$ 1
- Het laagste MIDI-nummer is dus 16, het hoogste 135 1
- Het antwoord: 120 (toetsen) 1

Twee paren punten op een cirkel

3 maximumscore 5

- Lijn l heeft een vergelijking van de vorm $y=-x+b$ en gaat door het punt $(4,4)$, dus $y=-x+8$ — 1
- $y=-x+8$ snijden met $x^2+y^2-10x+16y=56$ geeft $x^2+(-x+8)^2-10x+16(-x+8)=56$ — 1
- Deze vergelijking herleiden tot $2x^2-42x+136=0$ — 1
- Herleiden tot $(x-4)(x-17)=0$ — 1
- De x-coördinaat van B is 17 (want $x=4$ hoort bij A) en de y-coördinaat is -9 (dus $B(17,-9)$) — 1

4 maximumscore 6

- Uit $x^2+y^2-10x+16y=56$ volgt $(x-5)^2-25+(y+8)^2-64=56$ — 1
- (Hieruit volgt $(x-5)^2+(y+8)^2=145$ en dus) $M(5,-8)$ — 1
- De helling van CM is $\frac{0--8}{-4-5}=-\frac{8}{9}$ $(=-0{,}888...)$ — 1
- De tangens van de hellingshoek van CM is $-\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van CM is $-41{,}63...^\circ$ (dus $\angle DCM=41{,}63...^\circ$) — 1
- $\angle CDM=(\angle DCM=)\,41{,}63...^\circ$ — 1
- Dus $\angle CMD=180-2\cdot 41{,}63...\approx 96{,}7(^\circ)$ — 1

of

- Uit $x^2+y^2-10x+16y=56$ volgt $(x-5)^2-25+(y+8)^2-64=56$ — 1
- (Hieruit volgt $(x-5)^2+(y+8)^2=145$ en dus) $M(5,-8)$ — 1
- De helling van CM is $\frac{0--8}{-4-5}=-\frac{8}{9}$ $(=-0{,}888...)$ — 1
- De helling van DM is $\frac{0--8}{14-5}=\frac{8}{9}$ $(=0{,}888...)$ — 1
- De tangens van de hellingshoek van CM is $-\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van CM is $-41{,}63...^\circ$ (dus $\angle DCM=41{,}63...^\circ$); de tangens van de hellingshoek van DM is $\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van DM is $41{,}63...^\circ$ (dus $\angle CDM=41{,}63...^\circ$) — 1
- Dus $\angle CMD=180-2\cdot 41{,}63...\approx 96{,}7(^\circ)$ — 1

of

- Vanwege symmetrie geldt $x_M = \dfrac{-4+14}{2} = 5$ — 1
- $x = 5$ invullen in de vergelijking van c geeft $y^2 + 16y - 81 = 0$; het gemiddelde van de oplossingen geeft y_M, dus $y_M = \frac{-16}{2} = -8$ — 1
- De helling van CM is $\frac{0--8}{-4-5} = -\frac{8}{9}$ $(= -0{,}888...)$ — 1
- De tangens van de hellingshoek van CM is $-\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van CM is $-41{,}63...°$ (dus $\angle DCM = 41{,}63...°$) — 1
- $\angle CDM = (\angle DCM =)\, 41{,}63...°$ — 1
- Dus $\angle CMD = 180 - 2 \cdot 41{,}63... \approx 96{,}7(°)$ — 1

of

- Uit $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ volgt $(x-5)^2 - 25 + (y+8)^2 - 64 = 56$ — 1
- Hieruit volgt $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 145$ en dus $CM = \sqrt{145}$ $(= 12{,}04...)$ — 1
- $CD = 14 - -4 = 18$ — 1
- Als N het midden van CD is, dan ($\angle MNC = 90°$, dus) $\sin(\angle CMN) = \dfrac{9}{\sqrt{145}}$ — 1
- Hieruit volgt $\angle CMN = 48{,}36...°$ — 1
- Dus $\angle CMD = 2 \cdot 48{,}36... \approx 96{,}7(°)$ — 1

of

- Uit $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ volgt $(x-5)^2 - 25 + (y+8)^2 - 64 = 56$ — 1
- Hieruit volgt $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 145$ en dus $CM = DM = \sqrt{145}$ $(= 12{,}04...)$ — 1
- $CD = 14 - -4 = 18$ — 1
- $18^2 = \left(\sqrt{145}\right)^2 + \left(\sqrt{145}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{145} \cdot \sqrt{145} \cdot \cos(\angle CMD)$ — 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle CMD) = \dfrac{-17}{145}$ — 1
- Dus $\angle CMD \approx 96{,}7(°)$ — 1

Logaritme van een kwadratische functie

5 maximumscore 3

- (Voor de verticale asymptoot zou moeten gelden) $x^2-3x+3=0$ 1
- De discriminant van deze vergelijking is gelijk aan $(-3)^2-4\cdot1\cdot3=-3$ 1
- Dit is kleiner dan nul, dus de vergelijking heeft geen oplossingen (en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot) 1

of

- De grafiek van $y=x^2-3x+3$ is een dalparabool 1
- $x_{\text{top}}=-\frac{-3}{2\cdot1}=\frac{3}{2}$ (of $2x-3=0$ geeft $x_{\text{top}}=\frac{3}{2}$) 1
- $y_{\text{top}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}+3=\frac{3}{4}$; dit is groter dan nul, dus x^2-3x+3 kan niet nul zijn (en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot) 1

of

- (Voor de verticale asymptoot zou moeten gelden) $x^2-3x+3=0$ 1
- $x^2-3x+3=\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ 1
- Dit is (voor elke waarde van x) positief, dus de vergelijking heeft geen oplossingen (en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot) 1

6 maximumscore 5

- De vergelijking ${}^{2}\log\left(x^2-3x+3\right)=0$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $x^2-3x+3=1$ 1
- Herleiden tot $(x-2)(x-1)=0$ 1
- Dit geeft $x=2$ of $x=1$ 1
- (De grafiek van g gaat door $(4, 0)$), dus $a=(4-2=)\,2$ of $a=(4-1=)\,3$ 1

of

- Een functievoorschrift van g is $g(x)={}^{2}\log\left((x-a)^2-3(x-a)+3\right)$ 1
- (De grafiek van g gaat door $(4, 0)$), dus er moet gelden ${}^{2}\log\left((4-a)^2-3(4-a)+3\right)=0$ 1
- $(4-a)^2-3(4-a)+3=1$ 1
- Herleiden tot $a^2-5a+6=0$, dus $(a-2)(a-3)=0$ 1
- Dus $a=2$ of $a=3$ 1

Trapezium

7 maximumscore 4

- Volgens de sinusregel geldt in ΔABC: $\dfrac{6}{\sin\left(\angle ACB\right)} = \dfrac{5}{\sin\left(55°\right)}$ 1
- Hieruit volgt $\sin\left(\angle ACB\right) = 0{,}982...$ 1
- $\angle ACB = 100{,}585...°$ ($\angle ACB = 79{,}414...°$ voldoet niet) 1
- Dus $\angle BAC = 180 - 55 - 100{,}585... \approx 24{,}415°$ 1

of

- Volgens de cosinusregel geldt in ΔABC:
  $5^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \cos(55°)$ 1
- $BC^2 - 12\cos(55°) \cdot BC + 11 = 0$ geeft
  $BC = \dfrac{12\cos(55°) \pm \sqrt{(-12\cos(55°))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2}$ (dus $BC = 2{,}522...$
  ($4{,}359...$ voldoet niet)) 1
- Volgens de cosinusregel geldt in ΔABC:
  $2{,}522...^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\left(\angle BAC\right)$ 1
- Hieruit volgt $\cos\left(\angle BAC\right) = 0{,}910...$, dus $\angle BAC \approx 24{,}415°$ 1

of

- Volgens de cosinusregel geldt in ΔABC:
  $5^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \cos(55°)$ 1
- $BC^2 - 12\cos(55°) \cdot BC + 11 = 0$ geeft
  $BC = \dfrac{12\cos(55°) \pm \sqrt{(-12\cos(55°))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2}$ (dus $BC = 2{,}522...$
  ($4{,}359...$ voldoet niet)) 1
- Volgens de sinusregel geldt in ΔABC: $\dfrac{2{,}522...}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{5}{\sin(55°)}$ 1
- Hieruit volgt $\sin(\angle BAC) = 0{,}413...$, dus $\angle BAC \approx 24{,}415°$
  ($\angle BAC = 155{,}585...°$ voldoet niet) 1

8 maximumscore 5

- Er geldt $\sin(24{,}4...°)=\frac{h}{5}$; hieruit volgt $h=2{,}0...$ — 1
- Als D' de loodrechte projectie van D op AB is, dan geldt $AD'=\sqrt{3^2-2{,}0...^2}=2{,}1...$ — 1
- Als C' de loodrechte projectie van C op AB is, dan geldt $\tan(55°)=\frac{2{,}0...}{BC'}$; hieruit volgt $BC'=1{,}4...$ — 1
- Dus $CD=6-2{,}1...-1{,}4...=2{,}3...$ — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2{,}0...\cdot\frac{6+2{,}3...}{2}\approx 8{,}7$ — 1

of

- Er geldt $\sin(24{,}4...°)=\frac{h}{5}$; hieruit volgt $h=2{,}0...$ — 1
- $\angle ACD$ en $\angle BAC$ zijn Z-hoeken, dus $\angle ACD=\angle BAC=24{,}4...°$ — 1
- Volgens de cosinusregel geldt in ΔACD: $3^2=CD^2+5^2-2\cdot CD\cdot 5\cdot\cos(24{,}4...°)$ — 1
- Hieruit volgt (bijvoorbeeld met de GR) $CD=2{,}3...$ ($6{,}7...$ voldoet niet) — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2{,}0...\cdot\frac{6+2{,}3...}{2}\approx 8{,}7$ — 1

of

- Er geldt $\sin(24{,}4...°)=\frac{h}{5}$; hieruit volgt $h=2{,}0...$ — 1
- Als D' de loodrechte projectie van D op AB is, dan geldt $\sin(\angle DAD')=\frac{2{,}0...}{3}$; hieruit volgt $\angle DAD'=43{,}5...°$ ($\angle DAD'=136{,}4...°$ voldoet niet) — 1
- Dus $\angle DAC=43{,}5...-24{,}4...=19{,}1...°$ — 1
- Volgens de cosinusregel geldt in ΔACD: $CD^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos(19{,}1...°)=5{,}6...$, dus $CD=2{,}3...$ — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2{,}0...\cdot\frac{6+2{,}3...}{2}\approx 8{,}7$ — 1

of

- Een berekening waaruit volgt dat $BC = 2,5...$; dan geldt $\sin(55°) = \dfrac{h}{2,5...}$; hieruit volgt $h = 2,0...$ 1
- Als D' de loodrechte projectie van D op AB is, dan geldt $AD' = \sqrt{3^2 - 2,0...^2} = 2,1...$ 1
- Als C' de loodrechte projectie van C op AB is, dan geldt $BC' = \sqrt{2,5...^2 - 2,0...^2} = 1,4...$ 1
- Dus $CD = 6 - 2,1... - 1,4... = 2,3...$ 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2,0... \cdot \dfrac{6 + 2,3...}{2} \approx 8,7$ 1

Opmerkingen

– *Als de lengte van BC bij de vorige vraag berekend is, dan mag het resultaat van die berekening bij deze vraag gebruikt worden.*

– *Als uitgegaan wordt van* $\angle BAC = 24,41°$, *hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

Productiviteit

9 maximumscore 4

- Beschrijven hoe het maximum van P met de GR kan worden gevonden 1
- Dit geeft (de ideale temperatuur) $T = 21{,}65...$ (°C) 1
- $P(19{,}65...) = 99{,}2...$ (%) en $P(23{,}65...) = 99{,}3...$ (%) 1
- De conclusie: de productiviteit neemt het meest af bij twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur 1

of

- $P' = 0{,}01869T^2 - 1{,}16548T + 16{,}47524$ 1
- $P' = 0$ geeft (op het gegeven domein) (de ideale temperatuur) $T = 21{,}65...$ (°C) 1
- $P(19{,}65...) = 99{,}2...$ (%) en $P(23{,}65...) = 99{,}3...$ (%) 1
- De conclusie: de productiviteit neemt het meest af bij twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur 1

10 maximumscore 3

- $P(30) = 91{,}234...$ en $P(35) = 83{,}121...$ 1
- $a = \dfrac{83{,}121... - 91{,}234...}{35 - 30} = -1{,}622...$, dus $a \approx -1{,}623$ 1
- Invullen van $T = 30$ en $P = 91{,}234...$ (of $T = 35$ en $P = 83{,}121...$) in $P = -1{,}622... \cdot T + b$ geeft $b \approx 139{,}9$ 1

Sinus

11 maximumscore 3

- Uit de vergelijking $3\sin(\pi x) = \frac{3}{2}$ volgt $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$ — 1
- $\pi x = \frac{1}{6}\pi$ of $\pi x = \frac{5}{6}\pi$ (of: $\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$) — 1
- De x-coördinaat van P is $x = \frac{1}{6}$ en de x-coördinaat van Q is $x = \frac{5}{6}$ — 1

12 maximumscore 4

- De periode van f is ($\frac{2\pi}{\pi} =$) 2 (en de grafiek van f gaat door de evenwichtstand omhoog in O) — 1
- Hieruit volgt $x_A = 1$ — 1
- De amplitude van f is 3 (en $x_T = \frac{1+0}{2}$), dus de coördinaten van T zijn $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ — 1
- Invullen van $x = 1$ en $y = 0$ in $g(x) = ax^3 + bx$ geeft $a + b = 0$; invullen van $x = \frac{1}{2}$ en $y = 3$ geeft $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ — 1

of

- Voor x_A geldt $3\sin(\pi x) = 0$ dus $\sin(\pi x) = 0$ — 1
- Hieruit volgt x_A ($= \frac{\pi}{\pi}$) $= 1$ — 1
- Uit de vergelijking $3\sin(\pi x) = 3$ volgt $\sin(\pi x) = 1$ en dit geeft x ($= \frac{\frac{1}{2}\pi}{\pi}$) $= \frac{1}{2}$, dus de coördinaten van T zijn $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ — 1
- Invullen van $x = 1$ en $y = 0$ in $g(x) = ax^3 + bx$ geeft $a + b = 0$; invullen van $x = \frac{1}{2}$ en $y = 3$ geeft $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ — 1

13 maximumscore 3

- Uit $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ volgt $a + 4b = 24$, dus $(a + 4b) - (a + b) = 24$ — 1
- Dus $3b = 24$, dus $b = 8$ — 1
- Hieruit volgt $a = -8$ (en $b = 8$) — 1

of

- Uit $a + b = 0$ volgt $a = -b$, dus $-\frac{1}{8}b + \frac{1}{2}b = 3$ — 1
- Dus $\frac{3}{8}b = 3$, dus $b = 8$ — 1
- Hieruit volgt $a = -8$ (en $b = 8$) — 1

Gebroken functies

14 maximumscore 4

- De vergelijking $x+\frac{1}{x}=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$ moet worden opgelost — 1
- Hieruit volgt $\frac{3}{4}x=\frac{3}{x}$ (of bijvoorbeeld $\frac{x}{4}=\frac{1}{x}$) — 1
- Dit geeft $x^2=4$ — 1
- Dit geeft (met domein $\langle 0,\rightarrow\rangle$) $x=2$ — 1

15 maximumscore 3

- ($h(x)=\frac{1}{a}x+ax^{-1}$, dus) $h'(x)=\frac{1}{a}-ax^{-2}$ (of een vergelijkbare vorm) — 1
- $h'(x)=\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}$ — 1
- $h'(x)=\frac{x^2}{ax^2}-\frac{a^2}{ax^2}=\frac{x^2-a^2}{ax^2}$ — 1

16 maximumscore 4

- Uit $h'(x)=0$ volgt $x^2-a^2=0$ — 1
- Hieruit volgt $x^2=a^2$, dus (met $a>0$ en domein $\langle 0,\rightarrow\rangle$) $x=a$ — 1
- (De y-coördinaat van de top van de grafiek van h is) $h(a)=\frac{a}{a}+\frac{a}{a}$ — 1
- Dit is gelijk aan $(1+1=)$ 2 (dus is voor elke waarde van a, met $a>0$, de y-coördinaat van de top van de grafiek van h gelijk aan 2) — 1

Macht en lijnen

17 maximumscore 3

- Uit $\frac{3}{16x^4} = \frac{1}{32}$ volgt $x^4 = 6$ — 1
- Dit geeft $x = -\sqrt[4]{6}$ of $x = \sqrt[4]{6}$ — 1
- De afstand tussen de twee punten is $2\sqrt[4]{6}$ — 1

18 maximumscore 5

- $f(x) = \frac{3}{16}x^{-4}$ — 1
- $f'(x) = -\frac{12}{16}x^{-5}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- $f'(1) = -\frac{3}{4}$ — 1
- Dus l heeft een vergelijking van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$ — 1
- Invullen van de coördinaten van A in $y = -\frac{3}{4}x + b$ geeft $b = \frac{15}{16}$, dus de y-coördinaat van B is $\frac{15}{16}$ (of $B(0, \frac{15}{16})$) — 1